数理物理における放物線形偏微分方程式について

（第　三　報）

古　谷　嘉　志

On Parabolic partial differential equation of Mathematical physics（Ⅲ）

Yoshiyuki FURUYA

Melting problem of infinite and finite rod were treated. Author tried to solve them by considering no influence of moving boundury occour in solid portion.

はしがき

前報告で棒の一端に熱量を加えて融かして行く時の融解面の移動状態の性質を調べる級数解を求めた。

本報告では別の仮定を入れた近似法について述べる。

解　法（Ｉ）

半無限棒の一端 $x=0$ に一定熱量Ｆを加えて融かす時固体部分の温度分布は境界面の移動による影響が無視できるものとする。(5)

融解温度を T_m，融解面の位置を a(t) とかくと

$$T=T_m\left(1-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{\frac{x-a(t)}{2\sqrt{kt}}}e^{-\eta^2}d\eta\right) \quad (1)$$

$k=\frac{k}{\rho c}$　k：熱伝導係数，c：比熱　ρ：密度

$$\frac{\partial T}{\partial x}=-T_m\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{kt}}e^{-\frac{\{x-a(t)\}^2}{4kt}}$$

$$\therefore\quad -k\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\sqrt{\pi}\,kT_m}{4\sqrt{kt}}e^{-\frac{\{x-a(t)\}^2}{4kt}}$$

$$\therefore\quad -k\frac{\partial T(a(t),\ t)}{\partial x}=\frac{\sqrt{\pi}\,kT_m}{4\sqrt{kt}}$$

$$\therefore\quad \frac{\sqrt{\pi}\,kT_m}{4\sqrt{kt}}=F-\rho l a^{(1)}$$

$$\therefore\quad a(t)=\frac{F}{\rho l}-\frac{\sqrt{\pi}\,kT_m}{4\sqrt{k}\,\rho l}t^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\quad a(t)=\frac{F}{\rho l}t-\frac{\sqrt{\pi}\,kT_m}{2\sqrt{k}\,\rho l}\sqrt{t}+S_0$$

$S_0=a(0)$

一般に加える熱量が時間と共に変わる時

$F=Q(t)$　ならば

$$a(t)=\frac{1}{\rho l}\int_0^t Q(\tau)d\tau-\frac{\sqrt{\pi}\,kT_m}{2\sqrt{k}\,\rho l}\sqrt{t}+S_0$$

解　法（Ⅱ）

一端 $x=1$ を断熱にした有限棒の場合，固体部分の温度分布を　$T(x,\ O)=O$，$T(a(t),\ t)=T_m$

$\frac{\partial T(l,\ t)}{\partial x}=O$　の解であるとする。

$$T=T_m-\sum_{n=o}^{\infty}An\ exp\left\{-\frac{k\pi^2}{(l-a(t))^2}(n+\frac{1}{2})^2t\right\}\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l-a(t)}(x-a(t))^{(2)}$$

$t=o$　を代入すると

$$T_m=\sum_{n=o}^{\infty}An\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l}x$$

$$\therefore\quad A_n=\frac{2T_m}{(n+\frac{1}{2})\pi}$$

$$\therefore\quad T=T_m-\frac{2T_m}{\pi}\sum_{n=o}^{\infty}\frac{1}{n+\frac{1}{2}}exp\left\{-\frac{k\pi^2}{\{l-a(t)\}^2}(n+\frac{1}{2})^2t\right\}\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l-a(t)}(x-a(t))$$

上部から

$$-k\frac{\partial T(a(t),\ t)}{\partial x}=\frac{2kT_m}{\pi}\sum_{n=o}^{\infty}\frac{\pi}{l-a(t)}$$

$$\exp\left[-\frac{k\pi^2}{\{l-a(t)\}^2}(n+\frac{1}{2})^2 t\right]$$

$-k\dfrac{\partial T(a(t),\ t)}{\partial x}=F-\rho l a$ であるから

$$\frac{da(t)}{dt}=\frac{F}{\rho l}-\frac{2kT_m}{\rho l}\sum_{n=o}^{\infty}\frac{1}{l-a(t)}$$

$$\exp\left[-\frac{k\pi^2}{\{l-a(t)\}^2}(n+\frac{1}{2})^2 t\right] \quad \cdots\cdots(1)$$

(1) の第一次近似解を

$$\frac{da(t)}{dt}=\frac{F}{\rho l} \quad \cdots\cdots(2)$$

とする。$a(o)=O$ に時間の基準をとると

$$a=\frac{F}{\rho l}t \quad \cdots\cdots(2')$$

(1), (2) (2)′ から第二次近似解を

$$\frac{da}{dt}=\frac{F}{\rho l}-\frac{2kT_m}{\rho l}\sum_{n=o}^{\infty}\frac{1}{l-\frac{F}{\rho l}t}$$

$$\exp\left[-\frac{k\pi^2}{\{l-\frac{F}{\rho l}t\}^2}(n+\frac{1}{2})^2 t\right]$$

左辺を級数展開して積分すると

$$a(t)=\frac{F}{\rho l}t-\frac{2kT_m}{\rho l}\sum_{n=o}^{\infty}\sum_{m=o}^{\infty}\sum_{i=o}^{\infty}$$

$$\frac{(-1)^i\ l^i}{\left(\frac{F}{\rho l}\right)^{m+1}(m-i)!\ i!}\ \frac{1}{m+i}$$

$$\frac{k^m\ \pi^{2m}\ (n+\frac{1}{2})^{2m}}{(l-\frac{F}{\rho l}t)^{m+i}}$$

解　法 (Ⅲ)

半無限棒の場合，解法 (Ｉ) と同じ仮定を用いる。

$\dfrac{\partial T(o,\ t)}{\partial x}=g(t)$　　$T(x,\ o)$　　Oの時の解[3]

$$T(x,\ t)=-\sqrt{k}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}$$

$$\exp\left\{-\frac{x^2}{4k(t-\tau)}\right\}g(\tau)\,d(\tau)$$

を用いる。

融解面から計った距離を ξ とし $g(\tau)$ に $-\dfrac{1}{k}$ (F $-\rho l a$) を代入すると

$$T(x,\ t)=\frac{1}{k}\int_0^t\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}$$

$$\exp\left\{-\frac{\xi^2}{4k(t-\tau)}\right\}(F-\rho l a)d\tau \quad \cdots\cdots(3)$$

又解法 (Ｉ) で用いた解

$$T=T_m\left\{1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\xi}{2\sqrt{kt}}}e^{-\eta^2}d\eta\right\}^{(1)} \quad \cdots(4)$$

(3) と (4) を等しいと置くと

$$\frac{1}{k}\int_0^t\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left\{-\frac{\xi^2}{4k(t-\tau)}\right\}(F-\rho l a)d\tau$$

$$=T_m\left\{1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\xi}{2\sqrt{kt}}}e^{-\eta^2}d\eta\right\}$$

両辺を Laplace 変換する。

$$L\,[F-\rho l s]=\frac{F}{S}-\rho l s\bar{a}(s)^{(4)}$$

$$L\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\xi^2}{4kt}}\right]=\frac{1}{\sqrt{S}}e^{-\frac{\xi}{k}\sqrt{s}}$$

$$L\left[1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\xi}{2\sqrt{kt}}}e^{-\eta^2}d\eta\right]=\frac{1}{S}e^{-\frac{\xi}{\sqrt{k}}\sqrt{s}}$$

であることより

$$\frac{\sqrt{k}}{k\sqrt{s}}e^{-\frac{\xi}{\sqrt{k}}\sqrt{s}}\left\{\frac{F}{S}-\rho l s\,a(s)\right\}$$

$$=\frac{T_m}{S}\ e^{-\frac{\xi}{\sqrt{k}}\sqrt{s}}$$

$$\therefore\ \bar{a}(s)=\frac{-k}{\rho l\sqrt{k}\sqrt{s^3}}+\frac{F}{\rho l s^2}$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{S^{\frac{3}{2}}}\right]=2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \qquad L^{-1}\left[\frac{1}{S^2}\right]=t$$

であるから

$$a(t)=\frac{-2k}{\rho l\sqrt{\pi k}}\sqrt{t}+\frac{F}{\rho l}t$$

解　法 (Ⅳ)

巾hの棒を一様な温度 T_0 に加熱しこれを無限棒に接続させて融かして行く。有限棒を ($-h$, O) におき $x=O$ が接合点になるようにし融けた部分を取り除いて接合点はいつも $x=O$ の位置にあるようにする。有限棒の一端 $x=-h$ は熱しゃ断し有限棒の部分は添字1で示し半無限棒の部分を添字2で示す。

方程式は

$$k_1\frac{\partial_2 T_1}{\partial x^2}=\frac{\partial T_1}{\partial t}, \qquad k_2\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}=\frac{\partial T_2}{\partial t}$$

$$\frac{\partial T_1(h,\ t)}{\partial x}=O \qquad T_2(\infty,\ t)=O$$

$$T_1(x,\ O)=T_0, \qquad T_2(x,\ O)=O$$

Laplace 変換して初期条件境界条件を満たす解を求めると[4]

$$\begin{cases} S\bar{T}_1-T_0=k_1\dfrac{d^2\bar{T}_1}{\alpha x^2} \\ S\bar{T}_2=k_2\dfrac{d^2\bar{T}_2}{\alpha x^2}\end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{T}_1 = \dfrac{T_0}{S} + A\cos h\dfrac{\sqrt{S}}{\sqrt{k_1}}(x+h) \\ \bar{T}_2 = B\ e^{-\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{k_2}}x} \end{cases} \quad \cdots\cdots(5)$$

又

$$T_2 = T_m\left\{1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{k_2 t}}} e^{-\xi^2}d\xi\right\}$$

接合点では

$$\begin{cases} k_2\dfrac{\partial T_2}{\partial x} - k_1\dfrac{\partial T_1}{\partial x} = \rho l\, a(t) \\ T_1(O) = T_2(O) = T_m \end{cases}$$

Laplace変換して

$$\begin{cases} k_2\dfrac{d\bar{T}_2}{dx} - k_1\dfrac{d\bar{T}_1}{dx} = \rho ls\, a(s) \\ \bar{T}_1(O) = \bar{T}_2(O) = \dfrac{T_m}{S} \end{cases} \quad \cdots\cdots(6)$$

(5) より

$$\begin{cases} \dfrac{T_0}{S} + A\ coh\dfrac{\sqrt{S}}{\sqrt{k_1}}h = \dfrac{T_m}{S} \\ B = \dfrac{T_m}{S} \end{cases}$$

$$\therefore\ A = \frac{1}{\cos h\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{k_1}}h}\left(\frac{T_m}{S} - \frac{T_0}{S}\right)$$

故に (5) は

$$\begin{cases} \bar{T}_1 = \dfrac{T_0}{S} + \left(\dfrac{T_m}{S} - \dfrac{T_0}{S}\right)\dfrac{\sinh\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{k_1}}(x+h)}{\cosh\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{k_1}}h} \\ \bar{T}_2 = \dfrac{T_m}{S}\ e^{-\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{k_2}}x} \end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases} \dfrac{d\bar{T}_1}{dx} = \left(\dfrac{T_m}{S} - \dfrac{T_0}{S}\right)\dfrac{\sqrt{S}}{\sqrt{k_1}}\dfrac{\sinh\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{k_1}}(x+h)}{\cosh\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{k_1}}h} \\ \dfrac{d\bar{T}_2}{dx} = -\dfrac{\sqrt{S}}{\sqrt{k_2}}\dfrac{T_m}{S}\ e^{-\frac{\sqrt{S}}{k_2}x} \end{cases}$$

(6) より

$$-\frac{k_2}{\sqrt{k_2}}\sqrt{S}\frac{T_m}{S} - \frac{k_1}{\sqrt{k_1}}\left(\frac{T_m}{S} - \frac{T_0}{S}\right)\sqrt{S}\ \frac{\sinh\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{k_1}}h}{\cosh\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{k_1}}h} = \rho l s\,\bar{a}(s)$$

$$\therefore\ \bar{a}(s) = -\frac{1}{\rho l}\left\{\frac{k_2}{\sqrt{k_2}}\frac{T_m}{S\sqrt{S}} + \frac{k_1(T_m - T_0)}{\sqrt{k_1}}\ \frac{\sinh\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{k_1}}h}{S\sqrt{S}\cosh\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{k_1}}}\right\}$$

$$L^{-1}\left[\frac{\sinh\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{k_1}}h}{S\sqrt{S}\ \cosh\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{k_1}}}\right]$$

$$= \frac{h}{\sqrt{k_1}} - \frac{2}{\pi^2 k_1}\sum_{n=o}^{\infty}\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2}\exp\left\{-\frac{k_1}{h^2}(n+\frac{1}{2})^2\pi^2 t\right\}$$

であるから

$$a(t) = \frac{-1}{\rho l}\left[\frac{k_2 T_m}{\sqrt{k_2}}2\sqrt{\frac{t}{\pi}} + \frac{k_1(T_m - T_0)}{\sqrt{k_1}}\left\{\frac{h}{\sqrt{k_1}} - \frac{2}{\pi^2 k_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2}\exp\left(-\frac{k_1}{h^2}(n+\frac{1}{2})^2\pi^2 t\right)\right\}\right]$$

結　語

本研究では融解部分を取り除いて融かして行く場合をしらべた。又仮定として境界面の移動が固体部分の温度分布に与える影響を無視して取り扱った。このため解法Ⅳの場合　$t\to\infty$ のとき $a(t)$ は一定値に収束するはづなのがその極限値は求まらない。しかし$\sqrt{t}$の値はtが大きくなると変化が小さくなることよりある程度の精度はあるものと考えられる。

又この仮定は融ける速度が小さい時はかなりの精度があるものと思う。

参　考　文　献

1) H. S. Carslaw and J. C. Jaeger. "Conduetion of Heat in Solid."
2) アラマノヴイチ "数理物理学入門"
3) 大井鉄郎 "偏微分方程式とその応用"
4) チヤーチル "応用ラプラス変換"
5) A. Kobayashi "On a Slmplified Approaeh ro the Transient Thermoelastic Problem with Sublimation Ablation" J. A. S. vol. 8 No. 13 1965.

(昭41.10.31受付)